Twierdzenie Riesza – dualność L^p i L^q

Uwaga. Poniższa seria zadań jest na podstawie artykułu Naoki Shioji *Simple proofs of the uniform convexity of L^p and the Riesz representation theorem for L^p*. Można tam znaleźć szczegółowe dowody, chociaż warto najpierw zmierzyć się z nimi samemu.

Założenia. W poniższych zadaniach $(X, \mathcal{F}), \mu)$ jest dowolną niepustą przestrzenią z miarą dodatnią μ. Przestrzeń $L^p(X)$ (z ustalonym wykładnikiem $1 < p < \infty$) zawiera wszystkie funkcje mierzalne $u\colon X \to \mathbb{R}$, dla których skończona jest norma

$$\|u\|_{L^p(X)} := \left(\int_X |u(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p}.$$

Zadanie 1. Określmy funkcję

$$A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad A(x_1, x_2) = \frac{|x_1|^p + |x_2|^p}{2} - \left|\frac{x_1 + x_2}{2}\right|.$$

Sprawdzić, że

- $\alpha(x_1, x_2) \geqslant 0$, a równość zachodzi tylko dla $x_1 = x_2$;
- $\alpha(x_1, x_2) \geqslant \theta$ dla x_1, x_2 spełniających $|x_1|^p + |x_2|^p = 1$ i $|x_1 - x_2| \geqslant \eta$, ze stałą $\theta > 0$ zależną od $\eta > 0$;
- $\alpha(x_1, x_2) \geqslant \theta(|x_1|^p + |x_2|^p)$ dla x_1, x_2 spełniających $|x_1 - x_2| \geqslant \eta(|x_1|^p + |x_2|^p)$, ze stałą $\theta > 0$ zależną od $\eta > 0$.

Zadanie 2. Niech $u, v \in L^p(X)$ oraz $\eta, \theta > 0$ jak w poprzednim zadaniu. Określmy zbiór

$$M = \{x \in X : |u(x) - v(x)|^p \geqslant \eta(|u(x)|^p + |v(x)|^p)\}.$$

Wykazać, że

$$\int_{M^c} |u - v|^p \,\mathrm{d}\mu \leqslant \eta(\|u\|^p + \|v\|^p),$$
$$\int_M |u - v|^p \,\mathrm{d}\mu \leqslant \frac{2^{p-1}}{\theta} \int_M \alpha(u, v) \,\mathrm{d}\mu.$$

Zadanie 3. Załóżmy, że funkcje $u, v \in L^p(X)$ spełniają $\|u\|, \|v\| \leqslant c$ oraz $\|u-v\| \geqslant \varepsilon > 0$. Wykazać, że

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|^p \leqslant \frac{\|u\|^p + \|v\|^p}{2} - \delta,$$

z pewną stałą $\delta = \delta(p, c, \varepsilon) > 0$.

Uwaga. Z powyższej nierówności wynika bezpośrednio, że przestrzeń $L^p(X)$ jest jednostajnie wypukła, to znaczy

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{\delta>0} \ \left\| \frac{u+v}{2} \right\| \leqslant 1 - \delta \quad \text{dla } \|u\|, \|v\| = 1, \ \|u-v\| \geqslant \varepsilon.$$

Zadanie 4. Dla $q = \frac{p}{p-1}$ zdefiniujmy

$$\Phi \colon L^q(X) \to (L^p(X))^*, \quad \langle \Phi(u), v \rangle := \int_X uv \, \mathrm{d}\mu.$$

Sprawdzić, że jest to włożenie izometryczne.

Strategia dowodu. Dla dowodu dualności L^p i L^q pozostaje wykazać, że Φ jest *na*. W tym celu ustalimy funkcjonał $F \in (L^p(X))^*$ i znajdziemy odpowiednią funkcję z $L^q(X)$ reprezentującą ten funkcjonał. Do konstrukcji wykorzystamy *metodę bezpośrednią rachunku wariacyjnego* dla

$$J \colon L^p(X) \to \mathbb{R}, \quad J(u) = \frac{1}{p} \int_X |u|^p \, \mathrm{d}\mu - F(u).$$

Oznaczmy $m := \inf J$; znajdziemy punkt, w którym to minimum jest osiągane.

Zadanie 5. Wykazać nierówność $J(u) \geqslant \frac{1}{p}\|u\|^p - \|F\| \cdot \|u\|$ i wywnioskować, że m jest liczbą skończoną.

Zadanie 6. Zdefiniujmy zbiory $C_n = \{u \in L^p(X) : J(u) \leqslant m + \frac{1}{n}\}$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Sprawdzić, że

- C_n są niepuste, $C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3 \supseteq \ldots$;
- z nierówności z poprzedniego zadania wynika ograniczoność C_1;
- funkcja J jest ciągła, a więc C_n są domknięte;

- $\operatorname{diam} C_n \to 0$ – w tym celu można skorzystać z nierówności $J(u), J(v) \leqslant m + \frac{1}{n}$, $J(\frac{u+v}{2}) \geqslant m$ i jednostajnej wypukłości dla $u, v \in C_n$;
- przecięcie $\bigcap C_n$ składa się z dokładnie jednego punktu.

Wywnioskować, że istnieje dokładnie jedna funkcja $v \in L^p(X)$, dla której $J(v) = m$.

Zadanie 7. Niech $v \in L^p(X)$ otrzymaną wyżej funkcją, dla której J osiąga minimum, a u dowolną funkcją z $L^p(X)$. Uzasadnić rygorystycznie poniższy rachunek:

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} J(v + tu) = \int_X |v|^{p-2} vu \, \mathrm{d}\mu - F(u).$$

Wywnioskować, że $|v|^{p-2}v \in L^q(X)$ jest szukaną funkcją reprezentującą funkcjonał $F \in (L^p(X))^*$.

Słabe topologie ogólnie

Definicja. Niech X będzie zbiorem, a $\mathcal{F}$ rodziną funkcji $f_\alpha\colon X \to Y_\alpha$ w pewne przestrzenie topologiczne (Y_α, τ_α). Przez $\tau(X, \mathcal{F})$ będziemy oznaczać najsłabszą (czyli najmniejszą) topologię, dla której wszystkie funkcje z rodziny $\mathcal{F}$ są ciągłe.

Zadanie 1. Wykazać, że taka topologia istnieje, rozważyć mianowicie część wspólną wszystkich topologii mających żądaną własność. I upewnić się wcześniej, że nie mamy do czynienia z pustą rodziną.

Przypomnienie. Niech S będzie dowolną rodziną podzbiorów X. Bazą topologii generowanej przez S nazywamy rodzinę B wszystkich skończonych przecięć zbiorów z S:

$$B = \Big\{U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_k : k \in \mathbb{N}_0,\ U_j \in S\Big\}.$$

Topologią generowaną przez S nazywamy rodzinę $\tau(X, S)$ wszystkich sum zbiorów z B:

$$\tau(X, S) = \Big\{\bigcup_\alpha U_\alpha : U_\alpha \in B\Big\}.$$

Można sprawdzić, że istotnie jest to topologia (najsłabsza topologia zawierająca S).

Zadanie 2. Niech $S_\mathcal{F}$ będzie rodziną wszystkich zbiorów postaci $f_\alpha^{-1}(U)$, gdzie $f_\alpha \in \mathcal{F}$ i $U \in \tau_\alpha$ (czyli U jest otwartym podzbiorem Y_α). Korzystając z minimalności topologii $\tau(X, \mathcal{F})$ i $\tau(X, S_\mathcal{F})$, wykazać, że się one pokrywają.

Definicja. Rozważmy przestrzeń Banacha X i jej przestrzeń dualną X^*. Wówczas:

- $\tau(X, X^*)$ to *słaba topologia* na X.
- $\tau(X^*, X)$ to *słaba-$*$ topologia* (czyt. *słaba z gwiazdką topologia*) na X^*; przestrzeń X utożsamiamy tutaj z jej izometrycznym włożeniem $i(X) \subseteq X^{**}$ zadanym przez $\langle i(x), x^*\rangle := \langle x^*, x\rangle$.

Do oznaczenia zbieżności w tych topologiach używamy odpowiednio symboli $\rightharpoonup$ i $\overset{*}{\rightharpoonup}$.

Zadanie 3. Niech x_0 będzie punktem przestrzeni Banacha X. Sprawdzić, że bazą otoczeń x_0 w słabej topologii jest rodzina zbiorów postaci

$$U_{\varepsilon,\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_k}(x_0) = \Big\{x \in X : |\varphi_i(x) - \varphi_(x_0)| < \varepsilon \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, k\Big\}.$$

Sformułować i udowodnić podobną charakteryzację dla słabych-$*$ otoczeń $x_0^* \in X^*$.

Przypomnienie. Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Wówczas ciąg $x_n \in X$ zbiega do $x \in X$, jeśli dla każdego otoczenia otwartego $x \in U$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $x_m \in U$ dla wszystkich $m \geqslant n$.
Definicja zbieżności sieci (ciągów uogólnionych) jest taka sama, ale sieć x_n może być indeksowana dowolnym zbiorem skierowanym w miejsce $\mathbb{N}$ (do tego jeszcze wrócimy).

Zadanie 4. Sprawdzić następującą charakteryzację słabej zbieżności:

$$x_k \rightharpoonup x \quad \iff \quad \langle \varphi, x_k \rangle \to \langle \varphi, x \rangle \text{ dla każdego } \varphi \in X^*.$$

oraz analogiczną charakteryzację zbieżności słabej-$*$.

Definicja. Przypomnijmy włożenie izometryczne

$$i \colon X \to X^{**}, \qquad \langle i(x), x^* \rangle := \langle x^*, x \rangle,$$

które każdemu elementowi x przyporządkowuje funkcjonał na X^*, polegający na ewaluacji w x. Przestrzeń X nazywamy refleksywną, jeśli $i(X) = X^{**}$.

Zadanie 5. Wykazać, że topologie słaba i słaba-$*$ na X^* pokrywają się wtedy i tylko wtedy, gdy X jest refleksywna.
Wskazówka. Jeśli funkcjonał $\psi \in X^{**}$ jest słabo-$*$ ciągły, to przeciwobraz $\psi^{-1}((-1,1))$ zawiera zbiór postaci $U_{\varepsilon,x_1,x_2,\ldots,x_k}(0)$ dla pewnych $\varepsilon > 0$ i $x_i \in X$. Wywnioskować stąd, że $\psi \in \operatorname{span}(x_1, \ldots, x_k)$.

Zadanie 6. Sprawdzić, że słaba topologia spełnia warunek Hausdorffa T_2.

Zadanie 7. Wykazać, że każdy ciąg słabo zbieżny $x_n \rightharpoonup x$ w X jest ograniczony w normie.

Zadanie 8. Sprawdzić, że gdy $\dim X < \infty$, topologia słaba pokrywa się z topologią normową.

Zadanie 9. Wykazać, że każde słabe otoczenie zera zawiera podprzestrzeń skończonego kowymiaru. Wywnioskować, że w przypadku $\dim X = \infty$ jednostkowa kula otwarta $B = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ nie jest słabo otwarta, a norma $\| \cdot \|$ nie jest funkcją słabo ciągłą.

Słabe topologie w ulubionych przestrzeniach Banacha

Zadanie 1. Niech $1 < p < \infty$. Pokazać, że w przestrzeni ℓ^p słaba zbieżność ciągu $x_k \rightharpoonup x$ jest równoważna temu, że ciąg jest ograniczony i zbiega na każdej współrzędnej.

Zadanie 2. Wykazać, że dowolna baza ortonormalna w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ jest ciągiem słabo zbieżnym do zera.

Zadanie 3. (zakłada znajomość twierdzenia Riesza) Dowieść, że w przestrzeni $C([0,1])$ słaba zbieżność ciągu $f_k \rightharpoonup f$ jest równoważna temu, że ciąg jest ograniczony i zbiega punktowo.

Zadanie 4. Rozważmy przestrzeń c_0 ciągów rzeczywistych zbieżnych do zera, jej przestrzeń dualną $c_0^* = \ell^1$ i dualną do tej $(\ell^1)^* = \ell^\infty$. Sprawdzić, że ciąg $e_n \in \ell^1$ zbiega słabo-$*$ do zera, ale słabo już nie.

Zadanie 5. (twierdzenie Schura) Wykazać, że w przestrzeni ℓ^1 słaba zbieżność ciągu jest równoważna zbieżności normowej.

Wskazówka. Przypuśćmy istnienie ciągu spełniającego $x_k \rightharpoonup 0$ i $\|x_k\| \geqslant 1$. Dla otrzymania sprzeczności skonstruować *wędrujący garb*: podciąg y_k i ciąg $N_k \nearrow \infty$ takie, że

$$\sum_{j=1}^{N_{k-1}} |y_k(j)| \leqslant \frac{1}{10} \quad \text{oraz} \quad \sum_{j=N_k}^{\infty} |y_k(j)| \leqslant \frac{1}{10} \quad \text{dla każdego } k = 1, 2, \ldots.$$

Zadanie 6. W przestrzeni c_0 rozważmy zbiór $A = \{ne_n : n \in \mathbb{N}\}$. Udowodnić, że zero należy do słabego domknięcia A, a jednocześnie nie istnieje ciąg $x_k \in A$ zbiegający słabo do zera.

Wskazówka. Wykazać, że do każdego otoczenia bazowego 0 należy jakiś element postaci ne_n.

Uwaga. Znajomość zbieżności ciągów nie pociąga za sobą znajomości topologii. Istotnie, na ℓ^1 istnieją dwie drastycznie różne topologie, które wyznaczają tę samą zbieżność ciągów. A w c_0 słabe domknięcie zbioru zawiera nie tylko słabe granice ciągów punktów tego zbioru.

Zainteresowanych ograniczeniami stosowalności zbieżności ciągów – jak i drogą do pokonania tych ograniczeń – odsyłam do skryptu poświęconego sieciom (ciągom uogólnionym).

Twierdzenie Kreina-Milmana – zrób to sam

Niniejsza seria zadań pokazuje twierdzenie Kreina-Milmana w najprostszym przypadku przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ze standardową strukturą liniową i topologią. Poniżej zakładamy, że $K \subseteq \mathbb{R}^n$ jest niepustym zbiorem zwartym.

Zadanie 1. Niech $A \subseteq K$ będzie niepustym zwartym zbiorem ekstremalnym zbioru K oraz $v \in \mathbb{R}^n$. Wykazać, że zbiór

$$X_v A := \{x \in A : \langle v, x - y \rangle \geqslant 0 \text{ dla } y \in A\}$$

również jest niepustym zwartym zbiorem ekstremalnym zbioru K.

Zadanie 2. Każdy zbiór ekstremalny A zbioru K zawiera punkt ekstremalny zbioru K. W szczególności sam zbiór K posiada co najmniej jeden punkt ekstremalny.
Wskazówka. Rozważyć zbiór $X_{e_n} \ldots X_{e_1} A$.

Zadanie 3. Wykazać, że jeśli zbiór K jest wypukły, to

$$K = \operatorname{conv}(\operatorname{Extr} K),$$

czyli K jest zbiorem kombinacji wypukłych swoich punktów ekstremalnych.
Wskazówka. Jeśli $p \in K \setminus \operatorname{conv}(\operatorname{Extr} K)$, to istnieje wektor $v \in \mathbb{R}^n$ *oddzielający* p od $\operatorname{conv}(\operatorname{Extr} K)$. Rozważyć $X_v K$.

Punkty ekstremalne

Zadanie 1. Niech X będzie przestrzenią liniowo-topologiczną i załóżmy, że $V \subseteq X$ spełnia tezę twierdzenia Kreina-Milmana, to znaczy $V = \overline{\operatorname{conv}(\operatorname{Extr} V)}$. Uzasadnić, że dla każdej ciągłej funkcji wypukłej $\Phi \colon V \to \mathbb{R}$ zachodzi

$$\sup_{x \in V} \Phi(x) = \sup_{x \in \operatorname{Extr} V} \Phi(x),$$

czyli optymalizację Φ można ograniczyć do punktów ekstremalnych.

Zadanie 2. Dla każdej z poniższych przestrzeni rzeczywistych sprawdzić podaną charakteryzację punktów ekstremalnych domkniętej kuli jednostkowej $\{x : \|x\| \leqslant 1\}$.

(a) $L^1([0,1])$: brak.

(b) $C([0,1])$: funkcje stałe $+1$ i -1.

(c) c_0 (ciągi zbieżne do zera, norma supremum): brak.

(d) c (ciągi zbieżne, norma supremum): ciągi o wyrazach ± 1, od pewnego momentu stałe.

(e) ℓ^1: ciągi postaci e_n i $-e_n$.

(f) ℓ^∞: ciągi o wyrazach ± 1.

Zadanie 3. Udowodnić, że nie istnieje taka przestrzeń Banacha X, że $X^* = L^1([0,1])$ lub $X^* = C([0,1])$. Przez równość rozumiemy tutaj izometryczny izomorfizm.
Wskazówka. Skorzystać z Zadania 2.

Zadanie 4. Określmy $T \colon c_0 \to c$ wzorem

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_1 + x_4, \ldots).$$

Znaleźć wzór na T^{-1} i uzasadnić, że przestrzenie c_0 i c są izomorficzne.

Zadanie 5. Pokazać, że nie istnieje izometryczny izomorfizm $T \colon c_0 \to c$.
Wskazówka. Skorzystać z Zadania 2.

Zadanie 6. Niech K będzie zwartą przestrzenią metryczną, a $f\colon K \to K$ ciągłym przekształceniem. Oznaczmy przez $M_f(K)$ zbiór probabilistycznych miar f-niezmienniczych, czyli spełniających $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ dla każdego A. Sprawdzić, że jest on wypukłym i słabo-$*$ zwartym podzbiorem $M(K) = (C(K))^*$.

Zadanie 7. ★ Wykazać, że punkty ekstremalne zbioru $M_f(K)$ z poprzedniego zadania to dokładnie miary ergodyczne, czyli miary niezmiennicze μ o następującej własności:

$$\mu(A \div f^{-1}(A)) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu(A) \in \{0, 1\}.$$

Innymi słowy, miary niezmiennicze nie mające nietrywialnych zbiorów niezmienniczych.

Definicja. Funkcję $u\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ nazwiemy *harmoniczną*, jeśli

$$f(x) = \frac{1}{2n} \sum f(x \pm e_i) \quad \text{dla } x \in \mathbb{Z}^n,$$

czyli jej wartość w każdym punkcie jest średnią wartości w punktach sąsiednich.

Zadanie 8. (nierówność Harnacka) Wykazać, że każda nieujemna funkcja harmoniczna $f\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ spełnia

$$f(x) \leqslant (2n)^{\|x-y\|_1} f(y) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{Z}^n,$$

gdzie $\|v\|_1 = |v_1| + \ldots + |v_n|$.

Zadanie 9. ★ Udowodnić, że każda nieujemna funkcja harmoniczna $u\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ jest stała.

Wskazówka. Rozważyć przestrzeń X funkcji $f\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ z topologią indukowaną przez funkcjonały postaci δ_x ($x \in \mathbb{Z}^n$), oraz zbiór K nieujemnych funkcji harmonicznych $u\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ spełniających $u(0) = 1$.

Przestrzenie lokalnie wypukłe

Definicje.

- *Półnorma* na przestrzeni liniowej X to funkcja $p\colon X \to [0,\infty)$ spełniająca $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ i $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$. Przez kulę $\mathbf{B}_p(x,r)$ rozumiemy zbiór $\{y \in X : p(y-x) < r\}$.
- Jeśli dana jest rodzina półnorm p_α na X, definiujemy topologię $\tau(X, \{p_\alpha\})$ na X jako najsłabszą (tzn. najmniejszą) topologię, w której wszystkie półnormy p_α są ciągłe.
- Przestrzeń liniowo-topologiczną (X,τ) nazywamy *lokalnie wypukłą*, jeśli daje się opisać jako $(X, \tau(X, \{p_\alpha\}))$ dla pewnej rodziny półnorm.
- Rodzinę półnorm p_α na X nazywamy *wystarczającą*, jeśli $x = 0$ jest jedynym wektorem spełniającym $p_\alpha(x) = 0$ dla każdego α.

Zadanie 1. Wykazać, że bazą topologii $\tau(X, \{p_\alpha\})$ są skończone przecięcia kul:

$$U_{\varepsilon, p_{\alpha_a}, \ldots, p_{\alpha_k}}(x) = \Big\{ y \in X : p_{\alpha_i}(y-x) < \varepsilon \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, k \Big\}.$$

Zadanie 2. Sprawdzić, że topologia $\tau(X, \{p_\alpha\})$ spełnia warunek Hausdorffa T_2 wtedy i tylko wtedy, gdy rodzina p_α jest wystarczająca.

Zadanie 3. Zaproponować rodzinę półnorm

- na $C(\mathbb{R})$, która zadaje topologię zbieżności niemal jednostajnej;
- na $C^\infty(\mathbb{S}^1)$, która zadaje topologię zbieżności jednostajnej pochodnych dowolnego rzędu.

Zadanie 4. Sprawdzić, że jeśli $d_n\colon X \times X \to [0,\infty)$ jest ciągiem funkcji spełniających nierówność trójkąta, to

$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{d_n(x,y)}{1 + d_n(x,y)}$$

również spełnia nierówność trójkąta.

Zadanie 5. Dana jest przeliczalna wystarczająca rodzina półnorm p_α na X. Skonstruować metrykę na X, która indukuje topologię $\tau(X, \{p_\alpha\})$.

Zadanie 6. Niech A będzie dowolnym zbiorem, a X przestrzenią liniową wszystkich funkcji $f\colon A \to \mathbb{R}$. Rozważmy na X:

- topologię $\tau(X, \{p_a\})$ indukowaną przez półnormy $p_a(f) = |f(a)|$ $(a \in A)$;
- topologię $\tau(X, \{v_a\})$ indukowaną przez rodzinę funkcjonałów liniowych $v_a\colon X \to \mathbb{R}$, $v_a(f) = f(a)$;
- topologię produktową pochodzącą od izomorfizmu $X \cong \mathbb{R}^A$.

Sprawdzić, że te trzy topologie się pokrywają.

Zadanie 7. Niech X będzie przestrzenią liniowo-topologiczną i załóżmy, że zero posiada bazę otoczeń otwartych B_α o następujących własnościach. Każdy zbiór B_α jest zbalansowany (tzn. $\lambda B_\alpha \subseteq B_\alpha$ dla $|\lambda| \leqslant 1$), pochłaniający (tzn. $\bigcup_{\lambda>0} \lambda B_\alpha = X$) i wypukły. Wykazać, że X jest przestrzenią lokalnie wypukłą.

Wskazówka. Każdemu B_α przypisać półnormę p_α, dla której jest to kula jednostkowa.

Przestrzenie Frécheta

Definicja. Niech X będzie przestrzenią liniową z przeliczalną wystarczającą rodziną półnorm p_n. Definiujemy *normę Frécheta*

$$\|x\| := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x)}{1 + p_n(x)}$$

(mimo że nie jest to norma). Wówczas metryka $d(x, y) = \|x - y\|$ indukuje topologię $\tau(X, \{p_n\})$.

Jeśli przestrzeń (X, d) jest zupełna, nazwiemy ją *przestrzenią Frécheta*.

Zadanie 1. Uzasadnić, że poza przypadkiem przestrzeni jednopunktowej $X = \{0\}$ norma Frécheta nigdy nie jest normą.

Zadanie 2. W przestrzeni liniowo-topologicznej (X, τ):

- $x_n \to x$, jeśli dla każdego otwartego $0 \in B \subseteq X$ mamy $x_n - x \in B$ dla dostatecznie dużych n;
- (x_n) jest Cauchy'ego, jeśli dla każdego $0 \in B \subseteq X$ istnieje N takie, że $x_n - x_m \in B$ dla $n, m \geqslant N$;
- (X, τ) jest zupełna, jeśli każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny.

Wykazać, że zupełność (X, d) jest równoważna zupełności $(X, \{p_n\})$.

Zadanie 3. Na $C(\mathbb{R})$ rozważmy rodzinę półnorm $p_n(f) = \|f\|_{L^\infty([-n,n])}$. Sprawdzić, że zadaje to strukturę przestrzeni Frécheta.

Zadanie 4. W przestrzeni Frécheta $C(\mathbb{R})$ rozważmy funkcje $f(x) = (1 - |x|)^+$, $g(x) = 100f(x - 2)$, $h = (f + g)/2$. Sprawdzić, że ich normy Frécheta spełniają $\|f\| = \frac{1}{2}$, $\|g\| = \frac{50}{101}$, $\|h\| > \frac{1}{2}$. Wykazać, że kula domknięta $\mathbf{B}_d(0, \frac{1}{2})$ w metryce $d(x, y) = \|x - y\|$ nie jest wypukła.

Zadanie 5. Wykazać, że przestrzeń Frécheta $C(\mathbb{R})$ nie jest normowalna, to znaczy nie istnieje norma $\|\cdot\|$ na $C(\mathbb{R})$ spełniająca

$$p_n(f) \leqslant C_n \|f\| \quad \text{dla } f \in C(\mathbb{R}) \text{ i pewnych stałych } C_n > 0.$$

Wskazówka. Z powyższych nierówności wywnioskować ograniczenie na tempo wzrostu f.

Zadanie 6. Na $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ rozważmy rodzinę półnorm $p_n(f) = \|f^{(n)}\|_{L^\infty}$. Sprawdzić, że to również jest nienormowalna przestrzeń Frécheta.

Zadanie 7. Sprawdzić, że dla dowolnego $1 \leqslant q \leqslant \infty$ rodzina półnorm $p_n^q(f) = \|f^{(n)}\|_{L^q}$ na $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ definiuje tę samą przestrzeń Frécheta z poprzedniego zadania (w sensie topologii, nie metryki).

Teoria dystrybucji

Terminologia. Dystrybucja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ to nic innego jak ciągły funkcjonał liniowy $T\colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$. Ciągłość można wyrazić poprzez warunek

$$\forall_{K\subseteq\Omega \text{ zwarty}}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \exists_{C>0} \quad |\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C\|\varphi\|_{C^N(K)} \quad \text{dla każdego } \varphi \in \mathcal{D}(K).$$

Jeśli można dobrać wspólne $N \in \mathbb{N}$ dla wszystkich zwartych $K \subseteq \Omega$, to najmniejsze N o takiej własności nazywamy rzędem T.

Każdej funkcji $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ przypisujemy dystrybucję $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ daną wzorem

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{dla } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Dystrybucje dające się przedstawić jako T_f nazywamy *regularnymi*, zazwyczaj nawet utożsamiamy f i T_f.

Może się zdarzyć, że wszystkie dystrybucyjne pochodne cząstkowe T_f również są regularne, to znaczy $\partial_i T_f = T_{g_i}$ dla pewnych $g_1, \ldots, g_n \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Wektor $(g_1, \ldots, g_n)$ nazywamy wówczas *dystrybucyjnym* (lub *słabym*) gradientem f. Dla zainteresowanych – prowadzi to do pojęcia funkcji klasy Sobolewa.

Zadanie 1. Dlaczego całka definiująca T_f jest dobrze określona dla dowolnego $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, a nie tylko $f \in L^1(\Omega)$? Dlaczego jest to dystrybucja, to znaczy funkcjonał ciągły?

Zadanie 2. Funkcje klasy $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, a nawet miary Radona na Ω, wyznaczają dystrybucje rzędu 0. Natomiast jeśli dystrybucja T ma rząd N, to jej pochodna $D^\alpha T$ ma rząd najwyżej $N + |\alpha|$.

Zadanie 3. Gdy $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ jest dystrybucją, uzasadnić ciągłość ψT i $D^\alpha T$ dla dowolnej funkcji $\psi \in C^\infty(\Omega)$ i multiindeksu α.

Zadanie 4. Sprawdzić, że utożsamienie f z T_f ma sens: operacje na dystrybucjach odpowiadają operacjom na funkcjach. Mianowicie wykazać, że dla funkcji $f, g \in C^1(\Omega)$ i $\psi \in C^\infty(\Omega)$ zachodzi

$$T_f + T_g = T_{f+g}, \qquad \psi T_f = T_{\psi f}, \qquad \partial_i T_f = T_{\partial_i f} \quad \text{dla } i = 1, \ldots, n.$$

Uwaga. Z następnego zadania wynika, że funkcja $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ jest jednoznacznie wyznaczona przez odpowiadającą jej dystrybucję T_f. To nadaje utożsamieniu jeszcze więcej sensu.

Zadanie 5. (podstawowy lemat rachunku wariacyjnego)
Jeśli funkcja $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ spełnia

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{dla każdego } \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

to $f \equiv 0$.

Wskazówka. Rozważyć ciąg $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ przybliżający funkcję $\operatorname{sgn} f$ w odpowiednim sensie.

Zadanie 6. Dystrybucja $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ zeruje się po domnożeniu przez funkcję gładką x: $xT = 0$. Wykazać, że $T = \lambda\delta_0$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R}$.

Wskazówka. Sprawdzić, że zbiór $\{x\varphi : \varphi \in \mathcal{D}\}$ jest kowymiaru 1 w $\mathcal{D}$.

Zadanie 7. Sprawdzić, że wzór

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

zadaje poprawnie zdefiniowaną dystrybucję ($\mathcal{P}$ pochodzi od ang. *principal value*). Wykazać, że ma ona rząd 1.

Zadanie 8. Wyznaczyć pochodną dystrybucyjną funkcji

$$f_1(x) = x^2,$$
$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 0, \end{cases} \quad \text{(funkcja Heaviside'a)}$$
$$f_3(x) = \ln|x|.$$

Zadanie 9. Sprawdzić, że wzór

$$\left\langle \frac{1}{x+i0}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x+i\varepsilon}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

zadaje poprawnie zdefiniowaną dystrybucję. Wyprowadzić wzór Sochockiego

$$\frac{1}{x+i0} = \mathcal{P}\frac{1}{x} + \pi i \delta_0.$$

Zadanie 10. Sprawdzić, że delta Diraca nie jest regularną dystrybucją, tzn. nie istnieje funkcja $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ spełniająca

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0) \quad \text{dla } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Wskazówka. Skorzystać z podstawowego lematu rachunku wariacyjnego.

Zadanie 11. Wykazać, że jeśli $f \in C^1(\mathbb{R}^n \backslash 0)$, $f \in L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n \backslash 0)$ oraz $\nabla f \in L^1(\mathbb{R}^n \backslash 0)$, to ∇f jest dystrybucyjnym gradientem f na $\mathbb{R}^n$.
Wskazówka. Domnożyć funkcję testową przez funkcję wycinającą $\eta_r(x) = \eta(x/r)$, gdzie $\eta \in C_c^\infty(\mathbf{B}_2)$, $\eta \equiv 1$ na $\mathbf{B}_1$.

Zadanie 12. Obliczyć dywergencję dystrybucyjną pola wektorowego $V \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ zadanego przez

$$V(x,y) = (\operatorname{sgn} x, \operatorname{sgn} y) = \begin{cases} (1,1) & x>0,\ y>0 \\ (-1,1) & x<0,\ y>0 \\ (-1,-1) & x<0,\ y<0 \\ (1,-1) & x>0,\ y<0 \end{cases}$$

Uwaga. Przez dywergencję rozumiemy sumę dystrybucji $\partial_x T_{V^1}$ i $\partial_y T_{V^2}$, lub równoważnie dystrybucję określoną przez

$$\langle \operatorname{div} V, \varphi \rangle := -\int_{\mathbb{R}^2} V(x,y) \cdot \nabla\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Zadanie 13. Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją niemalejącą, a μ miarą Radona, dla której f jest dystrybuantą, tzn. $\mu((c,d]) = f(d^+) - f(c^+)$ (nazywamy ją miarą *Lebesgue'a-Stieltjesa*). Wykazać, że μ jest pochodną dystrybucyjną f.

Zadanie 14. Splot dystrybucji $w \in \mathcal{D}'$ z funkcją testową $f \in \mathcal{D}$ definiujemy jako funkcję

$$(f * w)(x) = \langle w, \gamma_x f \rangle, \quad \text{gdzie} \quad \gamma_x f(y) = f(x-y).$$

Sprawdzić, że jest to funkcja gładka i $D^\alpha(f*w) = (D^\alpha f) * w = f * (D^\alpha w)$.

Zadanie 15. (rozwiązanie fundamentalne)

Dany jest liniowy operator różniczkowy o stałych współczynnikach $P(D) = \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha$. Wykazać, że jeśli równanie $P(D)w = \delta_0$ posiada dystrybucyjne rozwiązanie $w \in \mathcal{D}'$, to możemy rozwiązywać równania jawnym wzorem:

$$v \in \mathcal{D} \quad \Longrightarrow \quad u = v * w \text{ rozwiązuje } P(D)u = v \text{ w klasycznym sensie.}$$

Zadanie 16. Znaleźć rozwiązanie fundamentalne dla operatorów $\partial_x \partial_y$ oraz Δ w $\mathbb{R}^2$.

Rozwiązania

Zadanie 3.

Rozwiązanie. Wystarczy sprawdzić, że obie strony dają ten sam rezultat przy ewaluacji na wybranej funkcji próbnej $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \langle T_f + T_g, \varphi \rangle &= \langle T_f, \varphi \rangle + \langle T_g, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega (f(x)+g(x))\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle T_{f+g}, \varphi \rangle\,, \\ \langle \psi T_f, \varphi \rangle &= \langle T_f, \psi\varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\psi(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle T_{\psi f}, \varphi \rangle\,, \\ \langle \partial_i T_f, \varphi \rangle &= -\langle T_f, \partial_i \varphi \rangle = -\int_\Omega f(x)\partial_i\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \partial_i f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle T_{\partial_i f}, \varphi \rangle\,. \end{aligned}$$

□

Zadanie 7.

Rozwiązanie. Warto zwrócić uwagę, że całka $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ jako taka nie jest dobrze określona. Rozważenie całki niewłaściwej pozwala nam jednak na wykorzystanie zmiany znaku w otoczeniu zera. Przedstawmy mianowicie φ w postaci

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(0) + x\int_0^1 \varphi'(tx)\,\mathrm{d}t.$$

Całka $\int_{|x|>1} \frac{1}{x}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ nie budzi wątpliwości jako dystrybucja, więc skupmy się całce po obszarze $|x| \leqslant 1$:

$$\int_{\varepsilon<|x|\leqslant 1} \frac{1}{x}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon<|x|\leqslant 1} \frac{1}{x}\left(\varphi(0) + x\int_0^1 \varphi'(tx)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon<|x|\leqslant 1}\int_0^1 \varphi'(tx)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$

Wiodący wyraz zniknął dzięki nieparzystości $1/x$. Przejście do granicy nie stanowi teraz problemu:

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{|x|>1} \frac{1}{x}\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^1\int_0^1 \varphi'(tx)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x.$$

Postać ta pozwala też łatwo sprawdzić ciągłość $\mathcal{P}\frac{1}{x}$. Istotnie, wynika z niej wprost, że

$$\left|\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle\right| \leqslant 2\ln(\operatorname{diam} K)\cdot \|\varphi\|_\infty + 2\|\varphi'\|_\infty,$$

a więc $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ jest rzędu najwyżej 1.

Pozostaje wykluczyć możliwość, że jest to dystrybucja rzędu 0. Skądinąd można wykazać, że dystrybucje rzędu 0 to dokładnie miary Radona, ale podamy bardziej bezpośredni argument. Niech $\eta \in C_c^\infty([-2,2])$ będzie dowolną funkcją nieujemną, dla której $\eta \equiv 1$ na $(-1,1)$, wprowadźmy też ciąg funkcji $\varphi_k(x) = \operatorname{arc\,tg}(kx)\eta(x)$. Skoro $\operatorname{supp}\varphi_k \subseteq [-2,2]$ i $\|\varphi_k\|_\infty \leqslant \frac{\pi}{2}$, to gdyby $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ było dystrybucją rzędu 0, ciąg $\left|\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi_k \right\rangle\right|$ byłby ograniczony. Z drugiej strony, zamiana zmiennych $y = kx$ pod całką daje równość

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi_k(\cdot) \right\rangle = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \operatorname{arc\,tg}(\cdot)\eta(\cdot/k) \right\rangle,$$

a nieograniczoność prawej strony łatwo wyprowadzić z rozbieżności całki $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. $\square$

Zadanie 8.

Rozwiązanie. Treść polecenia należy rozumieć jako: *dla* $i = 1,2,3$ *scharakteryzować pochodną dystrybucji* $T_{f_i} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *w możliwie prosty sposób.*

Dla f_1 klasyczna pochodna to $f_1'(x) = 2x$. Z poprzednich zadań wiemy już, że taka jest też pochodna dystrybucyjna. Bardziej pedantycznie: $(T_{f_1})' = T_{2x}$.

Dla f_2 wyznaczamy pochodną wprost z definicji:

$$\langle (T_{f_2})', \varphi \rangle = -\langle T_{f_2}, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} f_2(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^\infty \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\varphi(x)\Big|_0^\infty = \varphi(0).$$

Skądinąd pokrywa się to z działaniem delty Diraca δ_0 (czyli miary). Okazuje się więc, że $(T_{f_2})' = \delta_0$.

Dla f_3 możemy przeprowadzić ten sam rachunek, ale po całkowaniu przez części napotykamy problem z całkowalnością wokół zera (warto to sprawdzić samemu!). Żeby temu zaradzić, osobno całkujemy po obszarach $|x| \geqslant \varepsilon$ i $|x| < \varepsilon$ (dla ustalonego $\varepsilon > 0$) i całkujemy przez części tylko po tym pierwszym:

$$\begin{aligned}
\langle (T_{f_3})', \varphi \rangle &= -\int_{\mathbb{R}} \ln|x|\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \ln|x|\varphi'(x)\,\mathrm{d}x - \int_{|x|<\varepsilon} \ln|x|\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \ln|x|\varphi'(x)|_\varepsilon^\infty - \ln|x|\varphi'(x)|_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{|x|<\varepsilon} \ln|x|\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \ln(\varepsilon)(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) - \int_{|x|<\varepsilon} \ln|x|\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Jako funkcja gładka o zwartym nośniku φ ma ograniczoną pochodną, czyli $|\varphi'| \leqslant C$ dla pewnego C. Stąd wynika $|\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)| \leqslant 2C\varepsilon$, w rezultacie drugi wyraz zbiega do zera przy $\varepsilon \to 0$. W trzecim natomiast funkcja podcałkowa jest całkowalna (choć nieograniczona!), więc ten wyraz również znika. Pozostaje wyraz pierwszy:

$$\langle (T_{f_3})', \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{1}{x} \varphi(x) \, \mathrm{d}x.$$

Innymi słowy, $(T_{f_3})' = \mathcal{P}\frac{1}{x}$. Powyższy rachunek stanowi również kolejny dowód na to, że $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ jest dobrze określoną dystrybucją. $\square$

Transformata Fouriera

Definicja, podstawowe własności.

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$(i\partial)^\alpha \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(x^\alpha f)(\xi)$$
$$(i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi)$$
$$\mathcal{F}(f\circ L) = \frac{1}{|\det L|}\hat{f}\circ L^{-1}$$
$$\mathcal{F}(f(\cdot - y)) = e^{-i\langle y,\xi\rangle}\hat{f}$$

Odwracalność i twierdzenie Plancherela

Zadanie 1. Wykazać, że funkcja $g = \mathcal{F}(e^{-x^2})$ spełnia równanie różniczkowe zwyczajne

$$\frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi) = -\frac{\xi}{2}g(\xi), \qquad g(0) = \sqrt{\pi}.$$

Wywnioskować, że dla każdego $a > 0$ zachodzi

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x,\xi\rangle} e^{-a|x|^2}\,\mathrm{d}x = (\pi/a)^{d/2} e^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}.$$

Zadanie 2. Dla funkcji Schwartza $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ oraz dowolnego $\varepsilon > 0$ wykazać tożsamość

$$(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle} e^{-\varepsilon|\xi|^2}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = (4\pi\varepsilon)^{-d/2}\left(e^{-\frac{|\cdot|^2}{4\varepsilon}} * f\right)(x).$$

Wywnioskować, że

$$f(x) = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Zadanie 3. Oznaczmy $\check{\mathcal{F}}f(\xi) = \mathcal{F}f(-\xi)$. Sprawdzić, że $\overline{\mathcal{F}f} = \check{\mathcal{F}}\overline{f}$, $\overline{\check{\mathcal{F}}f} = \mathcal{F}\overline{f}$ oraz $\mathcal{F}\check{\mathcal{F}} = \check{\mathcal{F}}\mathcal{F} = (2\pi)^d\,\mathrm{id}$.

Zadanie 4. Wyprowadzić tożsamość

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f} g = \int_{\mathbb{R}^d} f \hat{g} \qquad \text{dla } f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Wywnioskować twierdzenie Plancherela: $\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = (2\pi)^{d/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$.

Uwaga. Twierdzenie Plancherela pozwala przedłużyć $\mathcal{F} \colon \mathcal{S} \to L^2$ do ciągłego operatora $\mathcal{F} \colon L^2 \to L^2$. W tym sensie tożsamość $\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = (2\pi)^{d/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ zachodzi dla dowolnego $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Transformaty Riesza

Zadanie 5. Dla $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ oraz $j = 1, \ldots, d$ określamy transformaty Riesza

$$R_j f := \mathcal{F}^{-1} \left(-\frac{i\xi_j}{|\xi|} \mathcal{F}(f) \right).$$

Sprawdzić, że

$$\sum_{j=1}^{d} R_j^2 f = -f, \qquad \partial_j \partial_k f = -R_j R_k \Delta f, \qquad \|R_j f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Zadanie 6. Wykazać, że dla $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ oraz $j, k = 1, \ldots, d$ zachodzi nierówność

$$\|\partial_j \partial_k f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\Delta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Tę samą nierówność otrzymać przy pomocy całkowania przez części.

Zadanie 7. ★ Może się wydawać, że rozumowanie z poprzednich dwóch zadań pozwala wyprowadzić oszacowanie $\|\partial_j \partial_k f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\Delta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ dla dowolnej dystrybucji temperowanej $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Gdzie to rozumowanie się załamuje?

Zadanie 8. Znaleźć kontrprzykład wśród funkcji gładkich! Mianowicie podać funkcję gładką $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, dla której $\Delta f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, ale $D^2 f \notin L^2(\mathbb{R}^d)$.

Norma Sobolewa

Definicja. Dla funkcji Schwartza $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ definiujemy normę Sobolewa

$$\|f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi.$$

Zadanie 9. Sprawdzić, że dla $s \in \mathbb{N}$ zachodzi równoważność norm:

$$\|f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} \approx \sum_{|\alpha| \leqslant s} \int_{\mathbb{R}^d} |\partial^\alpha f(x)|^2 \, \mathrm{d}x,$$

tzn. każda ze stron jest ograniczona z góry przez drugą z dokładnością do stałej multiplikatywnej zależnej tylko od d, s.

Zadanie 10. Wykazać, że jeśli $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ oraz $2s > d$, to norma $\|\hat{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ jest kontrolowana przez $\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$. Wywnioskować, że $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$.

Wskazówka. Przedstawić f w terminach $\hat{f}$ (czyt. użyć odwrotnej transformaty).

Zadanie 11. Wykazać, że jeśli $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ oraz $0 < s - \frac{d}{2} < 1$, to

$$|f(x) - f(y)| \lesssim |x - y|^{s - \frac{d}{2}} \cdot \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \qquad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Zadanie 12. Wykazać, że jeśli $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ oraz $s - \frac{d}{2} > 1$, to

$$|f(x) - f(y)| \lesssim |x - y| \cdot \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \qquad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Zasada nieoznaczoności (zob. blog Terence'a Tao)

Zadanie 13. Sprawdzić, że jeśli $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, to $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
(w następnym zadaniu sprawdzimy, że to najlepsze, co można uzyskać)

Zadanie 14. Wykazać, że jeśli funkcja $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ma zwarty nośnik, to $\hat{f}$ jest funkcją analityczną. Wywnioskować, że

$$f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d),\ f \not\equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{f} \notin C_c^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Zadanie 15. Wykazać *zasadę nieoznaczoności Hardy'ego*:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |x|^2 |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x\right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi\right)^{1/2} \geqslant \frac{1}{2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Implikuje ona, że funkcje f i $\hat{f}$ nie mogą być obie skoncentrowane wokół zera.

Wskazówka. Skorzystać ze wzoru na całkowanie przez części

$$\int |f|^2 = -\int x(f\overline{f}' + f'\overline{f}),$$

nierówności Cauchy'ego-Schwarza i twierdzenia Plancherela.

Rozwiązania

Zadanie 1.

Rozwiązanie. Innymi słowy, funkcja g jest zdefiniowana jako $g(\xi) = \int e^{-ix\xi}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Wartość $g(0) = \int e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ znamy skądinąd. Pochodną obliczamy, różniczkując pod znakiem całki:

$$\begin{aligned} g'(\xi) &= \int (-ix)e^{-ix\xi}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{i}{2}\int e^{-ix\xi}(e^{-x^2})'\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{i}{2}\widehat{f'}(\xi) = \frac{i}{2}\cdot i\xi\cdot\hat{f}(\xi) = -\frac{\xi}{2}g(\xi). \end{aligned}$$

Żeby rozwiązać to równanie różniczkowe, zauważamy, że funkcja $\frac{\xi^2}{4} + \ln g$ ma zerową pochodną, więc jest stała. W połączeniu z warunkiem $g(0) = \sqrt{\pi}$ daje to wzór $g(\xi) = \sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}$.

Przechodząc do drugiego wzoru, wystarczy podstawienie $y = \sqrt{a}x$ pod całką:

$$\int e^{-ix\xi}e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{a}}\int e^{\frac{iy\xi}{\sqrt{a}}}e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{a}}g(\xi/\sqrt{a}) = \sqrt{\pi/a}\cdot e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$$

Mnożąc d takich równości i korzystając z twierdzenia Fubiniego, otrzymujemy analogiczny wzór dla $\mathbb{R}^d$. □

Zadanie 5.

Rozwiązanie. Definicję $R_j f$ wygodnie jest zapisywać *po stronie transformaty Fouriera*, to znaczy:

$$\widehat{R_j f}(\xi) = -\frac{i\xi_j}{|\xi|}\hat{f}(\xi).$$

Dwukrotne złożenie R_j daje dwukrotne domnożenie, więc

$$\begin{aligned} \widehat{R_j^2 f}(\xi) &= \left(-\frac{i\xi_j}{|\xi|}\right)^2\hat{f}(\xi), \\ \sum_{j=1}^d \widehat{R_j^2 f}(\xi) &= -\frac{\sum_{j=1}^d \xi_j^2}{|\xi^2|}\hat{f}(\xi) = -\hat{f}(\xi), \end{aligned}$$

skąd po przyłożeniu odwrotnej transformaty odczytujemy równość $\sum R_j^2 f = -f$.

Drugą równość możemy potraktować podobnie, analizując transformaty Fouriera kolejnych złożeń:

$$\begin{aligned}\widehat{\partial_j\partial_k f}(\xi) &= i\xi_j \cdot i\xi_k \cdot \hat{f}(\xi) = -\xi_j\xi_k\hat{f}(\xi),\\ \widehat{\Delta f}(\xi) &= \sum_{l=1}^{d}\widehat{\partial_l\partial_l f}(\xi) = -|\xi|^2\cdot\hat{f}(\xi),\\ \mathcal{F}(-R_jR_k\Delta f)(\xi) &= -\left(i\xi_j/|\xi|\right)\left(i\xi_k/|\xi|\right)\left(-|\xi|^2\right)\hat{f}(\xi) = -\xi_j\xi_k\hat{f}(\xi),\end{aligned}$$

skąd odczytujemy $\mathcal{F}(\partial_j\partial_k f) = \mathcal{F}(-R_jR_k\Delta f)$ i w konsekwencji tezę.

Na potrzeby oszacowania przypomnijmy twierdzenie Plancherela. Sprowadza ono sprawę do analogicznej nierówności między transformatami. Ta jednak jest trywialna (zachodzi punktowo):

$$(2\pi)^{d/2}\|R_jf\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\widehat{R_jf}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \left\|\tfrac{\xi_j}{|\xi|}\hat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = (2\pi)^{d/2}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

□

Zadanie 6.

Rozwiązanie. Dowolną drugą pochodną można otrzymać, aplikując do laplasjanu odpowiednie transformaty Riesza. Ponieważ są to kontrakcje na L^2, otrzymujemy

$$\|\partial_j\partial_k f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|R_jR_k\Delta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|R_k\Delta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\Delta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

To samo oszacowanie uzasadnimy teraz, wielokrotnie całkując przez części.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}(\Delta f)^2 &= \int_{\mathbb{R}^d}\sum_{i,j}\partial_i\partial_i f\cdot\partial_j\partial_j f\\ &= -\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{i,j}\partial_i f\cdot\partial_i(\partial_j\partial_j f)\\ &= -\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{i,j}\partial_i f\cdot\partial_j(\partial_j\partial_i f)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\sum_{i,j}\partial_j\partial_i f\cdot\partial_j\partial_i f\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}|D^2 f|^2.\end{aligned}$$

W szczególności wynika stąd nierówność $\|\partial_j\partial_k f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\Delta f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}$.

Znikanie wyrazów brzegowych najłatwiej uzasadnić dla $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, wówczas można się ograniczyć do całkowania po kostce $[-R, R]^d$ na tyle dużej, że f wraz z pochodnymi jest zerowe na jej brzegu. Uzasadnienie tego rachunku dla $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pozostawiam jako ćwiczenie. $\square$

Transformata Fouriera – dodatek (nierówność izoperymetryczna)

Nierówność izoperymetryczna w $\mathbb{R}^2$. Jeśli obszar $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ jest ograniczony lipszycowską krzywą $\partial\Omega$, to

$$|\partial\Omega|^2 \geqslant 4\pi|\Omega|,$$

a równość zachodzi jedynie, gdy Ω jest kołem.

Oznaczenia i konwencje. Rozważamy dodatnio zorientowaną parametryzację $\gamma\colon [0,1] \to \partial\Omega$ o stałej prędkości $|\dot{\gamma}| = L = |\partial\Omega|$, oznaczamy $g(t) = (x(t), y(t))$. Przypomnijmy podstawowe własności szeregów Fouriera:

$$\hat{v}(k) = \int_0^1 v(s)e^{-2\pi iks}ds \quad \text{dla } k \in \mathbb{Z}$$
$$v(s) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{v}(k)e^{2\pi iks} \quad \text{w } L^2(0,1)$$
$$\hat{\dot{v}}(k) = -2\pi ik \cdot \hat{v}(k)$$
$$\int_0^1 |v(s)|^2 \,\mathrm{d}s = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{v}(k)|^2$$

Poniżej znajduje się dowód nierówności izoperymetrycznej pochodzący od Adolfa Hurwitza.

Zadanie 1. Wykazać, że wielkość

$$A := \frac{1}{2}\int_\gamma xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x(s)\dot{y}(s) - \dot{x}(s)y(s)) \,\mathrm{d}s$$

jest równa polu $|\Omega|$.

Zadanie 2. Wykazać, że

$$L^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} 4\pi^2k^2 \left(|\hat{x}(k)|^2 + |\hat{y}(k)|^2\right),$$
$$A = \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2\pi ik \left(\hat{x}(k)\overline{\hat{y}(k)} - \overline{\hat{x}(k)}\hat{y}(k)\right).$$

Wywnioskować, że $L^2 \geqslant 4\pi A$.
Wskazówka. Warto zastosować tożsamość $|a \pm ib|^2 = |a|^2 + |b|^2 \pm i(a\overline{b} - \overline{a}b)$.

Zadanie 3. Prześledzić dowód nierówności i sprawdzić, że równość zachodzi jedynie dla parametryzacji postaci

$$(x(s), y(s)) = (x_0, y_0) + r \cdot (\cos(s + \theta), \sin(s + \theta)).$$

Algebry Banacha

Definicja i przykłady. Domyślnie wszystkie algebry są nad $\mathbb{C}$.

Zadanie 1. Sprawdzić, że każda z poniższych algebr jest algebrą Banacha:

- $M_n(\mathbb{F})$ – macierze $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ z normą operatorową i działaniem mnożenia macierzy (czyli składaniem operatorów);
- $B(X)$ – operatory ciągłe na przestrzeni unormowanej X z normą operatorową i działaniem składania operatorów;
- $C(K)$ – funkcje ciągłe na przestrzeni zwartej K z normą supremum i mnożeniem punktowym;
- $C_b(X)$ – funkcje ograniczone na przestrzeni topologicznej X z normą supremum i mnożeniem punktowym;
- $A(K)$ – funkcje ciągłe na zbiorze zwartym $K \subseteq \mathbb{C}$ holomorficzne w jego wnętrzu z normą supremum i mnożeniem punktowym;
- $\ell^1(\mathbb{N})$ – funkcje sumowalne na $\mathbb{N}$ z normą ℓ^1 i działaniem splatania
$$f * g(n) = \sum_{k \in \mathbb{N}} f(n-k)g(k);$$
- $L^1(\mathbb{R}^d)$ – funkcje całkowalne na $\mathbb{R}^d$ z normą L^1 i działaniem splatania
$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\, \mathrm{d}y;$$
- $C_0(\mathbb{R}^d)$ – funkcje ciągłe na $\mathbb{R}^d$ o zerowej granicy w nieskończoności z normą supremum i mnożeniem punktowym.

Zadanie 2. Wykazać, że jeśli $B(X)$ jest algebrą przemienną (tzn. $xy = yx$ dla wszystkich $x, y \in X$), to $\dim X \leqslant 1$.
Wskazówka. Pokazać nieprzemienność $B(\mathbb{R}^2)$.

Zadanie 3. Sprawdzić, że jeśli A jest algebrą Banacha z mnożeniem $(x, y) \mapsto xy$, to z mnożeniem $(x, y) \mapsto yx$ również.

Zadanie 4. Niech A będzie przestrzenią unormowaną, a $T\colon A \times A \to A$ przekształceniem dwuliniowym. Sprawdzić równoważność

$$T \text{ jest ciągłe} \qquad \iff \qquad \exists_{C \geqslant 0} \quad \|T(x,y)\| \leqslant C\|x\| \cdot \|y\| \quad \text{dla } x, y \in A.$$

Zadanie 5. Przyjmijmy oznaczenia z poprzedniego zadania. Sprawdzić, że przestrzeń liniowa A z normą $\|x\|_T := C\|x\|$ i T jako mnożeniem jest algebrą Banacha.

Algebry unitarne.

Zadanie 6. Jeśli algebra Banacha posiada element neutralny mnożenia e, to $\|e\| \geqslant 1$.

Zadanie 7. Sprawdzić, że pierwsze sześć algebr Banacha z Zadania 1 to algebry unitarne, to znaczy istnieje w nich element neutralny mnożenia e i ma on normę 1.

Zadanie 8. Sprawdzić, że $\mathbb{C}^2$ z normą $\|\cdot\|_\infty$ i mnożeniem

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_1 y_2)$$

jest algebrą Banacha, która posiada więcej niż jedną lewostronną jedynkę, ale żadnej prawostronnej.

Zadanie 9. Niech A będzie algebrą Banacha nad K. Wprowadźmy jej rozszerzenie $A_e := A \oplus K$ (suma prosta przestrzeni liniowych) z mnożeniem i normą zdefiniowanymi przez:

$$(x_1 + \lambda_1 e) \cdot (x_2 + \lambda_2 e) := x_1 x_2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1 + \lambda_1 \lambda_2,$$
$$\|x + \lambda e\| := \|x\| + |\lambda|,$$

przy czym przez e oznaczamy jedynkę w K. Sprawdzić, że A_e jest unitarną algebrą Banacha, ponadto

$$A \ni x \mapsto x + 0 \cdot e \in A_e$$

jest zanurzeniem izometrycznym o domkniętym obrazie.

Zadanie 10. Na nietrywialnej przestrzeni Banacha A zdefiniujmy trywialne mnożenie $x \cdot y = 0$ i rozważmy ujedynkowienie A_e. Sprawdzić, że elementy postaci $x + 0 \cdot e$ są jedynymi nieodwracalnymi elementami w A_e.

Uwaga. Taką trywialną algebrę można zrealizować jako podalgebrę macierzy M_n.

Zadanie 11. Niech A będzie algebrą Banacha z jedynką, a $B(A)$ algebrą operatorów ciągłych $A \to A$. Oznaczmy operator domnażania z lewej $L_x(y) = xy$. Dowieść, że

$$A \in x \mapsto L_x \in B(A)$$

zadaje izomorfizm A z pewną domkniętą podalgebrą $B(A)$.
Uwaga. Tego izomorfizmu można użyć, by przenormować A i uzyskać $\|e\| = 1$.

Zadanie 12. Rozważyć $\mathbb{C}^2$ z normą $\|\cdot\|_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ i mnożeniem po współrzędnych

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2).$$

Sprawdzić, że

a) jest to algebra Banacha z jedynką,

b) jedynka ma normę 1 wtedy i tylko wtedy gdy $p = \infty$,

c) norma $\|x\|_0 := \|L_x\|$ skonstruowana zadanie wyżej to po prostu norma ∞.

Zadanie 13. Niech A będzie algebrą Banacha. *Jedynką aproksymatywną* nazwiemy ciąg $x_n \in A$ taki, że $x_n y \to y$ oraz $y x_n \to y$ dla dowolnego $y \in A$. Wykazać, że jeśli A posiada jedynkę e, to powyższe pojęcie się trywializuje: x_n jest jedynką aproksymatywną wtedy i tylko wtedy, gdy $x_n \to e$.

Zadanie 14. Niech $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ będzie funkcją nieujemną spełniającą $\int \varphi = 1$. Sprawdzić, że ciąg $\varphi_n(x) = n^d \varphi(nx)$ jest jedynką aproksymatywną w algebrze $L^1(\mathbb{R}^d)$. Wywnioskować stąd, że $L^1(\mathbb{R}^d)$ nie posiada jedynki.

Zadanie 15. Sprawdzić, że algebra $C_0(\mathbb{R}^d)$ nie posiada jedynki. Wykazać, że algebra z dołączoną jedynką $(C_0(\mathbb{R}^d))_e$ jest izomorficzna z algebrą funkcji ciągłych posiadających granicę w nieskończoności (z normą supremum i mnożeniem punktowym).

Spektrum, rezolwenta i promień spektralny. Cały czas zakładamy, że A jest algebrą unitarną.

- Spektrum $\sigma(x)$ elementu $x \in A$ to zbiór tych $\lambda \in \mathbb{C}$, dla których element $\lambda e - x$ jest odwracalny.

- Rezolwenta to funkcja $R_x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}$ określona dla $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$.
- Promień spektralny to $r(x) := \max(|\lambda| : \lambda \in \sigma(x))$. Można go wyznaczyć wzorem
$$r(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|x^n\|} = \lim_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|x^n\|}.$$

Zadanie 16. Niech A będzie unitarną przestrzenią Banacha, $x \in A$ oraz $\lambda, \mu \notin \sigma(x)$. Wyprowadzić *równanie rezolwenty*

$$(\lambda e - x)^{-1} - (\mu e - x)^{-1} = (\lambda - \mu)(\lambda e - x)^{-1}(\mu e - x)^{-1}.$$

Zadanie 17. W unitarnej algebrze Banacha element $x \in A$ spełnia $x^n = 0$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Wyznaczyć jego spektrum $\sigma(x)$ i rezolwentę R_x.
Wskazówka. Wyrazić $R_x(\lambda)$ jako wielomian od x.

Zadanie 18. Ze wzoru na promień spektralny wyprowadzić, że

a) $r(xy) = r(yx)$;

b) r jest półciągłe z góry, to znaczy
$$x_k \to x \text{ w } A \quad \Longrightarrow \quad r(x) \geqslant \limsup_{k\to\infty} r(x_k);$$

c) jeśli x i y komutują (to znaczy $xy = yx$), to
$$r(xy) \leqslant r(x)r(y), \quad r(x+y) \leqslant r(x) + r(y).$$

Zadanie 19. Z wykładu wiemy, że dla $\|x\| < 1$ zachodzi wzór

$$(e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Uzasadnić go przy słabszym założeniu $r(x) < 1$.

Rozwiązania

Zadanie 4.

Rozwiązanie. Poniższy dowód jest prawie identyczny z dowodem charakteryzacji ciągłości dla przekształceń liniowych $A \to A$.
Na początek załóżmy, że przekształcenie dwuliniowe $T\colon A \times A \to A$ jest ciągłe i przypuśćmy, że żądana stała nie istnieje. Wtedy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ znajdziemy $x_n, y_n \in A$ spełniające

$$\|T(x_n, y_n)\| \geqslant \frac{1}{n^2}\|x_n\|\|y_n\|.$$

Bez straty ogólności możemy przyjąć $\|x_n\| = \|y_n\| = \frac{1}{n}$, wtedy $x_n, y_n \to 0$ i dzięki ciągłości $T(x_n, y_n) \to 0$. Z drugiej strony, $\|T(x_n, y_n)\| \geqslant 1$, co prowadzi do sprzeczności.

Odwrotnie, przyjmijmy teraz, że T spełnia nierówność ze stałą C. Wówczas dla dowolnych ciągów zbieżnych $x_n \to x$ i $y_n \to y$ mamy

$$\begin{aligned}\|T(x_n, y_n) - T(x, y)\| &\leqslant \|T(x_n, y_n) - T(x_n, y)\| + \|T(x_n, y) - T(x, y)\| \\ &= \|T(x_n, y_n - y)\| + \|T(x_n - x, y)\| \\ &\leqslant C\|x_n\|\|y_n - y\| + C\|x_n - x\|\|y\|,\end{aligned}$$

co oczywiście zbiega do zera. □

Zadanie 11.

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że z warunku $\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|$ wynika ograniczoność L_x, a więc operator L jest dobrze określony. Ale wynika z niego nawet $\|L_x\|_{B(A)} \leqslant \|x\|$, a więc samo L również jest ograniczone: $\|L\|_{A \to B(A)} \leqslant 1$. Łatwo sprawdzić, że L jest homomorfizmem algebr z jedynką (to znaczy zachowuje wszystkie działania).

Co więcej,

$$\|L_x\|_{B(A)} \geqslant \left\|L_x\left(\frac{e}{\|e\|}\right)\right\| = \|e\|^{-1}\|xe\| = \|e\|^{-1}\|x\|,$$

więc L okazuje się być izomorfizmem na swój obraz. Z zupełności obrazu wynika teraz, że jest on domkniętą podalgebrą $B(A)$. □

Uwaga. Gdy A jest algebrą unitarną (czyli $\|e\| = 1$), wykazane górne i dolne oszacowanie daje równość $\|L_x\|_{B(A)} = \|x\|$. To oznacza, że A jest izometryczne z domkniętą podalgebrą $B(A)$.
W ogólności tak być nie musi, można jednak przeciągnąć normę z $B(A)$ i rozważać $\|x\|_0 := \|L_x\|_{B(A)}$. Jest to norma równoważna wyjściowej, ale spełniająca $\|e\|_0 = 1$.

Przemienne algebry Banacha i C^*-algebry

Przemienne algebry Banacha. W poniższych zadaniach A jest przemienną unitarną algebrą Banacha, chyba że napisano inaczej.

Zadanie 1. Ideał $J \subseteq A$ jest właściwy wtedy i tylko wtedy, gdy jest rozłączny z grupą elementów odwracalnych $G(A)$.

Zadanie 2. Jeśli $J \subseteq A$ jest ideałem, to domknięcie $\overline{J}$ również. A jeśli J jest właściwy, to $\overline{J}$ też.

Zadanie 3. Każdy ideał maksymalny $M \subseteq A$ jest domknięty.

Uwaga. Z powyższego zadania wynika, że iloraz A/M ma strukturę unitarnej algebry Banacha z dzieleniem, a więc na mocy twierdzenia Gelfanda-Mazura jest to $\mathbb{C}$.

Zadanie 4. Każdy ideał właściwy $J \subseteq A$ jest zawarty w pewnym ideale maksymalnym.

Wskazówka. Lemat Kuratowskiego-Zorna.

Charaktery. Gdy A nie ma jedynki, przez charakter rozumiemy niezerowy homomorfizm algebr $\chi\colon A \to \mathbb{C}$.

Zadanie 5. Nie ma niezerowych charakterów na $M_n(\mathbb{C}) = B(\mathbb{C}^n)$. To jest nieprzemienne!

Zadanie 6. Pokazać, że w algebrze Banacha $\ell^1(\mathbb{Z})$ (z działaniem splatania) wszystkie charaktery są postaci

$$\ell^1(\mathbb{Z}) \ni a \mapsto \sum_n a_n z^n \quad \text{dla pewnego } z \in \mathbb{S}^1.$$

Wskazówka. Wykorzystać $(\ell^1)^* = \ell^\infty$, a następnie sprawdzić, co oznacza warunek $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$.

Zadanie 7. ★ Pokazać, że w algebrze Banacha $L^1(\mathbb{R})$ (z działaniem splatania) wszystkie charaktery są postaci

$$L^1(\mathbb{R}) \ni f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi}\, \mathrm{d}x \quad \text{dla pewnego } \xi \in \mathbb{R}.$$

Wskazówka. Jak w poprzednim zadaniu, ale dodatkowo sprawdzić ciągłość badanej funkcji z $L^\infty(\mathbb{R})$.

Uwaga. W tym kontekście zapis transformacji Gelfanda jako $\hat{f}(\xi)$ (gdzie ξ reprezentuje powyższy charakter) nawiązuje do transformaty Fouriera.

Zadanie 8. Niech A będzie przemienną algebrą Banacha (niekoniecznie z jedynką). Sprawdzić, że każdy charakter $\varphi \in \Delta(A)$ przedłuża się do $\varphi \in \Delta(A_e)$ wzorem $\varphi(x + \lambda e) = \varphi(x) + \lambda e$. Wykazać, że przy tym utożsamieniu

$$\Delta(A_e) = \Delta(A) \cup \{\varphi_\infty\},$$

gdzie charakter $\varphi \in \Delta(A_e)$ jest dany przez $\varphi(x + \lambda e) = \lambda$.

C^*-algebry. Następne zadania dotyczą C^*-algebry, czyli (niekoniecznie przemiennej) unitarnej algebry Banacha wyposażonej w antyliniowe inwolucyjne działanie * spełniające $(ab)^* = b^*a^*$, $e^* = e$ oraz $\|a^*a\| = \|a\|^2$.

Zadanie 9. W dowolnej C^*-algebrze inwolucja $a \mapsto a^*$ jest izometrią.

Wskazówka. Rozważyć $\|a^*a\|$.

Zadanie 10. Niech H będzie przestrzenią Hilberta. Sprawdzić, że algebra Banacha $B(H)$ wyposażona w operację sprzężenia $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ jest C^*-algebrą.

Zadanie 11. Pokazać, że w C^*-algebrze $C(K)$ (K – przestrzeń zwarta) jedyne charaktery to ewaluacje $f \mapsto f(x)$ zadane przez punkty $x \in K$.

Wskazówka. Wykazać, że w przeciwnym przypadku dla każdego $x \in K$ istnieje funkcja $f \in \ker\chi$ niezerująca się w x, a nawet dodatnia na otoczeniu x. Doprowadzić do sprzeczności z właściwością $\ker\chi$.

Zadanie 12. Opierając się na poprzednim zadaniu, przekonać się, że przestrzeń charakterów $\Delta(C(K))$ z topologią Gelfanda jest homeomorficzna z K. Ponadto transformacja Gelfanda $C(K) \to C(\Delta)$ jest izometrią.

Zadanie 13. ★ Niech X będzie dowolną przestrzenią topologiczną. Weźmy $A := C_b(X)$ – przemienną C^*-algebrę funkcji ciągłych ograniczonych oraz $\beta X := \Delta(A)$ – przestrzeń zwartą charakterów na A. Wykazać, że przestrzeń βX wraz z włożeniem $\iota\colon X \to \beta X$ danym przez $\iota(x) = \mathrm{ev}_x$ jest uzwarceniem Čecha-Stone'a przestrzeni X, to znaczy posiada następującą własność uniwersalną: dla dowolnego przekształcenia ciągłego $f\colon X \to K$ w przestrzeń zwartą K istnieje dokładnie jedno przekształcenie ciągłe $\beta f\colon \beta X \to K$ spełniające $\beta f \circ \iota = f$.

Dla chętnych. Jeśli przestrzeń X jest normalna, to $\iota : X \to \beta X$ jest homeomorfizmem na swój obraz.

Rachunek funkcyjny na $B(\mathcal{H})$

Operatory normalne i samosprzężone. W poniższej serii zadań $\mathcal{H}$ zawsze jest przestrzenią Hilberta.

Zadanie 1. Jeśli $T \in B(\mathcal{H})$ jest samosprzężony, to $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ dla dowolnego $x \in \mathcal{H}$. Ponadto $\|T\| = \sup_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle$.

Zadanie 2. Udowodnić, że operator $T \in B(\mathcal{H})$ jest normalny wtedy i tylko wtedy, gdy $\|T^*x\| = \|Tx\|$ dla wszystkich $x \in \mathcal{H}$. Wywnioskować, że zachodzi wówczas równość $\ker T = \ker T^* = (\operatorname{im} T)^\perp$.

Zadanie 3. Operator $p \in B(H)$ nazywamy rzutem, jeśli jest idempotentny, to znaczy $p^2 = p$. Wykazać, że w takim przypadku poniższe trzy warunki są równoważne:

a) p jest samosprzężony;

b) p jest normalny;

c) p jest rzutem ortogonalnym.

Rachunek funkcyjny. W poniższych zadaniach przyjmujemy, że jeśli $T \in B(\mathcal{H})$ jest operatorem normalnym (czyli $T^*T = TT^*$), to Φ_T jest jego rachunkiem funkcyjnym.

Zadanie 4. (to zadanie nie korzysta wprost z rachunku funkcyjnego) Niech A będzie algebrą Banacha z jedynką.

- Dla $a \in A$ sprawdzić, że element $\exp(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ jest dobrze określony.
- Jeśli $ab = ba$, to $\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b)$.
- Jeśli istnieje stała $C > 0$ taka, że $\|ab\| \leqslant C\|ba\|$ dla wszystkich $a, b \in A$, to A jest algebrą przemienną.

Wskazówka. Rozważyć holomorficzną funkcję $f(\lambda) = \varphi(e^{\lambda a} b e^{-\lambda b})$, gdzie $\varphi \in A^*$.

Zadanie 5. Niech $T \in B(\mathcal{H})$ będzie operatorem normalnym. Sprawdzić, że T jest unitarny (czyli $T^*T = TT^* = 1$) wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma(T) \subseteq \mathbb{S}^1$.
Wskazówka. Rozważyć funkcję $g\colon \sigma(T) \to \mathbb{C}$ daną wzorem $g(\lambda) = \overline{\lambda}\lambda$.

Zadanie 6. Weźmy $T \in B(\mathcal{H})$ i oznaczmy $|T| := \sqrt{T^*T}$. Pokazać, że istnieje operator $V \in B(\mathcal{H})$ spełniający

$$V^*V = P_{\overline{\operatorname{im}|T|}}, \quad VV^* = P_{\overline{\operatorname{im} T}}$$

(czyli będący izometrią z $\overline{\operatorname{im}|T|}$ na $\overline{\operatorname{im} T}$, rozszerzoną zerem na $\ker |T|$), a ponadto $T = V|T|$. Sprawdzić, że $|T| = V^*T$ oraz $T^* = |T|V^*$.

Zadanie 7. Sprawdzić z definicji, że jeśli $T \in B(\mathcal{H})$ jest normalny, to

$$R_T(\lambda) = (\lambda - T)^{-1} = \Phi_T\left(\frac{1}{\lambda - z}\right) \quad \text{dla } \lambda \notin \sigma(T).$$

Zadanie 8. Niech $T \in B(H)$ będzie operatorem normalnym. Sprawdzić, że jeśli $A \subseteq \sigma(T)$ jest zbiorem borelowskim, to $\Phi_T(\mathbb{1}_A)$ jest rzutem ortogonalnym.

Zadanie 9. Niech $T \in B(H)$ będzie operatorem normalnym, którego spektrum da się rozbić jako suma $\sigma(T) = K_1 \cup K_2$ dwóch rozłącznych zbiorów zwartych. Skonstruować rozkład prestrzeni X na sumę $X = X_1 \oplus X_2$ dwóch ortogonalnych podprzestrzeni takich, że $\sigma(T|_{X_1}) = K_1$ i $\sigma(T|_{X_2}) = K_2$.

Zadanie 10. Niech $T \in B(H)$ będzie operatorem normalnym, a Φ_T jego borelowskim rachunkiem funkcyjnym. Zbiór borelowski $A \subseteq \sigma(T)$ nazywamy zaniedbywalnym, jeśli $\Phi_T(\mathbb{1}_B) = 0$. Sprawdzić, że klasa zbiorów zaniedbywalnych jest zamknięta na przeliczalne sumy i przechodzenie do podzbioru.